Date : / / Subject:

.تصنيف المعادلات الجزئية لها

.ايجاد الحل العام للمعادلة من النمط الزائدي

.خواص ومفاهيم عامة

.المعادلة التفاضلية الجزئية في متغيرين مستقلين (x, y)

.هي علاقة بين $u(x,y)$ ومشتقاتها جزئية من المرتبة الثانية

.وما في ذلك المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية نفسها

..وتكتب بالشكل $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy})$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

.المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية تسمى خطية

اذا كانت خطية بالنسبة للمشتقات من المراتب العليا وبالنسبة

.لدالة u ومشتقاتها الأولى أيضا وتكتب في الشكل الآتي:

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + f_1 u + f = 0$$

.علماً أن A, B, C, D, E, f_1 ثوابت لـ x, y فقط

.علماً أن $|A| + |B| + |C| \neq 0$

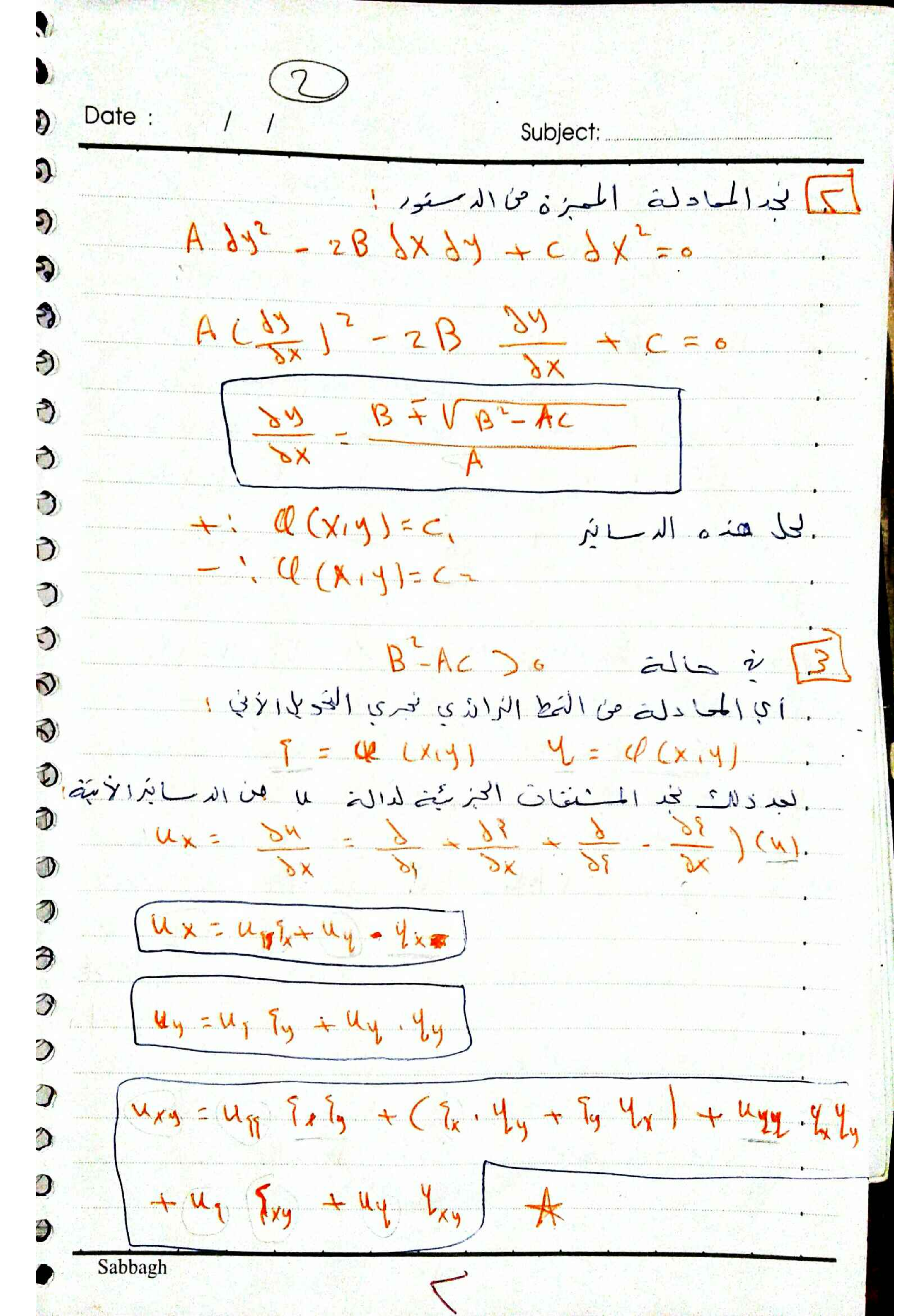
.* لحل المعادلة المعطاة نتبع الخطوات الآتية:

1. نجد $B^2 - AC$ فاذا كان

أ - $B^2 - AC > 0$ المعادلة من النمط الزائدي

ب - $B^2 - AC = 0$ المعادلة من النمط المكافئ

ج - $B^2 - AC < 0$ المعادلة من النمط الناقص



[2] نجد المعادلة المميزة من الدستور :

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\,\frac{dy}{dx} + C = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}}$$

نحل هذه المسائل.

$+ : \varphi(x,y) = c_1$

$- : \psi(x,y) = c_2$

[3] في حالة $B^2 - AC > 0$

أي المعادلة من النمط الزائدي نجري التحويل الآتي :

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad \eta = \psi(x,y)$$

بعد ذلك نجد المشتقات الجزئية لدالة u من المسائل الآتية :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)(u)$$

$$\boxed{u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x}$$

$$\boxed{u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y}$$

$$\boxed{u_{xy} = u_{\xi\xi}\,\xi_x \xi_y + (\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta}\,\eta_x \eta_y + u_\xi\,\xi_{xy} + u_\eta\,\eta_{xy}}$$ ★

للحصول على u_{xx} نبدل في ★ كل y بـ x

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\,\eta_x^2 + u_\xi\,\xi_{xx} + u_\eta\,\eta_{xx}$$

وللحصول على u_{yy} نبدل في ★ كل x بـ y

4. نبدل قيم هذه المشتقات في الدالة المعطاة لنجد جميع الحدود المشتركة نحصل على الشكل النموذجي الآتي:

$$u_{\xi\eta} = \varphi(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta)$$

نحل هذه المعادلة والعودة إلى المتحولات القديمة x, y لا نحصل على الحل

5. في حالة $B^2 - AC = 0$ أي المعادلة من النمط المكافئ

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y) \\ \eta &= \psi(x,y) \end{aligned}\right\} \text{ أي تابع لـ } x, y$$

نأخذ $\eta = x$ أو $\eta = y$ في حل التمارين

ونبقي فرض $\eta = \eta(x,y)$ أي نأخذ ξ تابع لـ x و y ($\xi = x$ أو $\xi = y$)

نجد المشتقات الجزئية وبعد الاختصار نحصل على الشكل النموذجي بالشكل

$$u_{\xi\xi} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

$$\text{أو } \quad u_{\eta\eta} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

6. المعادلة $B^2 - AC < 0$ المعادلة من النمط الناقص

في هذه الحالة حل المعادلة المميزة هو $\varphi(x,y) = c$ أي $u(x,y) \mp i\,v(x,y)$

$$\xi = \alpha(x,y) \quad , \quad \eta = \beta(x,y)$$

نجد المشتقات الجزئية $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ من د سابقاً مباشرة

ونبدل في المعادلة المعطاة فنحصل على الشكل النموذجي

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

مثال ص٢

أوجد الشكل النموذجي للمعادلة

$$x u_{xx} + (x+y) u_{xy} + y u_{yy} = 0$$

ثم أوجد الحل العام؟

الحل

$A = x$

$2B = x + y$

$C = y$

$$B^2 - AC = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2+y^2+2xy-4xy}{4}$$

$$= \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 > 0$$ المعادلة من النمط الزائدي

المعادلة المميزة لها هي $A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$

$$x\,dy^2 - (x+y)\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0$$

طريقة ١ $(dy - dx)(x\,dy - y\,dx) = 0$

إما $(dy - dx) = 0 \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \boxed{y - x = c_1}$ ⟸

أو $x\,dy - y\,dx = 0 \xrightarrow{xy\div} \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$

بالمكاملة $\ln y - \ln x = \ln c_2$

$$\ln\frac{y}{x} = \ln c_2 \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = c_2}$$

Date : / / Subject:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$ طريقة 2

$+$: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln y - \ln x = \ln c_2 \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln c_2 \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = c_2}$$

$-$: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}}{x} = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$dy = dx \Rightarrow dy - dx = 0 \Rightarrow \boxed{y - x = c_1}$$

نجري التحويل الآتي ② $\xi = y - x \; , \; \eta = \frac{y}{x}$

نحسب المشتقات الجزئية

$\xi_x = -1 \; , \; \xi_y = 1 \; , \; \xi_{xy} = 0 \; , \; \xi_{xx} = 0 \; , \; \xi_{yy} = 0 \; ,$

$\eta_x = \frac{-y}{x^2} \; , \; \eta_y = \frac{1}{x} \; , \; \eta_{xy} \frac{1}{x^2} \; , \; \eta_{xx} = \frac{2y}{x^3} \; , \; \eta_{yy} = 0 \; ,$

$$- u_{xy} = u_{\xi\xi} \, \xi_x \xi_y + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \, \xi_{xy} + u_\eta \, \eta_{xy}$$

$$- u_{xy} = -u_{\xi\xi} + \left(-\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right) u_{\xi\eta} - \frac{y}{x^3} u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2} u_\eta$$

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - \left(\frac{y+x}{x^2}\right) u_{\xi\eta} - \frac{y}{x^3} u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2} u_\eta$$

$$- u_{xx} = u_{\xi\xi} \, \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \, \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \, \xi_{xx} + u_\eta \, \eta_{xx}$$

$$= u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^2} u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3} u_\eta$$

$u_{yy} = u_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_y\,\eta_y + u_{\eta\eta}\,\eta_y^2 + u_\xi\,\xi_{yy} + u_\eta\,\eta_{yy}$

$= u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$

نعوض

$$x\,u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^3}u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^2}u_\eta$$
$$+ (x+y)\left[-u_{\xi\xi} - \frac{(x+y)}{x^2}u_{\xi\eta} - \frac{y}{x^3}u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\eta\right]$$
$$+ y\,u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x}u_{\xi\eta} + \frac{y}{x^2}u_{\eta\eta} = 0$$

$u_{\xi\xi}$ أمثال : $x - (x+y) + y = 0$

$u_{\eta\eta}$ أمثال : $\frac{y^2}{x^3} + (x+y)\left(\frac{-y}{x^3}\right) + \frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x^3} - \frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x^2} = 0$

$u_{\xi\eta}$ أمثال : $\frac{2y}{x} - \frac{(y+x)^2}{x^3} + \frac{2y}{x} = \frac{4y}{x} - \frac{(y^2+x^2+2xy)}{x^2}$

$= \frac{4xy - y^2 - x^2 - 2xy}{x^2} = -\frac{y^2+x^2-2xy}{x^2} = -\frac{(y-x)^2}{x^2}$

u_η أمثال : $\frac{2y}{x^2} - (x+y)\frac{1}{x^2} = \frac{2y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$

$= \left(\frac{y-x}{x^2}\right) - \frac{(y-x)^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y-x}{x^2}u_\eta = 0$

$(y-x)\,u_{\xi\eta} - u_\eta = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{y-x}u_\eta = 0$

$\Rightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{\xi}u_\xi = 0$ — (3)

$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_\xi - \frac{1}{\xi}u\right] = 0$

نثبت ξ ونكامل بالنسبة لـ η فنجد

بالنسبة η ~~بالنسبة~~ ونحصل على معادلة تفاضلية عادية

Date : / / Subject:

[هو u والمتغير المستقل هو ξ):

بنضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل هنا:

$y' + p(x)y = q(x)$

$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

$[\mu(x)\, y]' = q(x)\,\mu(x)$

$\mu(x) \cdot y = \int q(x)\,\mu(x)\,dx$

$\mu(\xi) = e^{\int -\frac{1}{\xi}\,d\xi} = e^{-\ln \xi} = e^{\ln \frac{1}{\xi}} = \frac{1}{\xi}$

$[\frac{1}{\xi} u]' = \varphi(\xi) \cdot \frac{1}{\xi}$

بالمكاملة:

$\frac{1}{\xi} \cdot u = \underbrace{\int \varphi(\xi) \frac{1}{\xi}\, d\xi}_{\varphi(\xi)} + \varphi(\eta)$

$u = \xi\, [\varphi(\xi) + \varphi(\eta)]$

بدلالة ξ، η

$u(x,y) = x\,[\varphi(x) + \varphi(\frac{y}{x})]$

ملاحظة:

$u_{\xi\xi} = 0$

$\frac{\partial}{\partial \xi}[u_\xi] = 0$

نثبت η ونكامل بالنسبة ξ

$u(\xi,\eta) = \int \varphi(\eta)\, d\xi + \psi(\eta)$

$= \varphi(\eta)\,\xi + \psi(\eta)$